

Zadání: Jednorozměrná relativistická úloha: auto vlastní délky $d_{a0} = 1$ projíždí rychlostí $\beta = v/c = 0,6$ garáží stejné vlastní délky $d_{g0} = 1$. Lorentzův činitel je tedy $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = 5/4$. Když je prostředek auta uprostřed garáže, přeskóčí jiskra (událost L) a záblesk světla letí na obě strany. Vyneste vše do grafu a určete různé události v soustavě S (v ní garáž stojí) i v soustavě S' (v ní stojí auto). Berte $c = 1$.

Garáž: Garáž je v klidu v soustavě S. Má vlastní délku $d_{g0} = 1 = d_g$, vjezd (vlevo) A, výjezd B. „Garážní“ čas značíme t a vynášíme *svísele* vzhůru (plná červená šipka). Polohu vůči garáži značíme x a vynášíme *odorovně* (zleva doprava, plná červená šipka). Počátek souřadnic $x = 0$ volíme v A, výjezd B má tedy $x = 1$. Časový počátek $t = 0$ v S i $t' = 0$ v S' volíme, když ve vjezdu A do garáže je příď D auta (událost AD). Souřadnice události píšeme ve vztažné soustavě S v pořadí $[x; t]$. Vše je bez čárky.

Auto: Auto jede vůči garáži zleva doprava rychlostí $\beta = 0,6 = 3/5$. Auto je v klidu v soustavě S'. Má vlastní délku $d_{a0} = 1 = d_a'$, vlevo záď (C) se souřadnicí $x' = -1$, vpravo příď (D) se souřadnicí $x' = 0$. V soustavě S' (auta) značíme časy t' , polohy x' , souřadnice událostí $[x'; t']'$. Vše je s čárkou, i závorka.

Základní události značíme dvěma písmeny (setkání auta s garáží) nebo L:

- AD do garáže vjíždí (A) příď (D) auta
- AC do garáže vjíždí (A) záď (C) auta
- BD z garáže vyjíždí (B) příď (D) auta
- BC z garáže vyjíždí (B) záď (C) auta
- L setkání středu auta se středem garáže

Souřadnice hlavních událostí; velké modré kroužky, hodnoty v obou soustavách v pořadí $[x; t]$ a $[x'; t']'$

AD	= [0; 0]	= [0; 0]'	do garáže vjíždí (A) příď (D) auta
AC	= [0; 4/3]	= [-1; 5/3]'	do garáže vjíždí (A) záď (C) auta
BD	= [1; 5/3]	= [0; 4/3]'	z garáže vyjíždí (B) příď (D) auta
BC	= [1; 3]	= [-1; 3]'	z garáže vyjíždí (B) záď (C) auta
L	= [1/2; 3/2]	= [-1/2; 3/2]'	setkání středu auta se středem garáže

Souřadnice doplňujících událostí; malé červené kroužky, pro světlo černé kroužky

Konec auta (C), když:

E	= [-5/4; -3/4]	= [-1; 0]'	podle auta (S') do garáže vjíždí (A) příď (D) auta
F	= [-4/5; 0]	= [-1; 3/5]'	podle garáže (S) do garáže vjíždí (A) příď (D) auta
G	= [-1/4; 11/12]	= [-1; 4/3]'	podle auta (S') z garáže vyjíždí (B) příď (D) auta
H	= [1/5; 5/3]	= [-1; 29/15]'	podle garáže (S) z garáže vyjíždí (B) příď (D) auta
I	= [1/4; 7/4]	= [-1; 2]'	dostihne ho záblesk

Začátek auta (D), když:

J	= [5/4; 25/12]	= [0; 5/3]'	podle auta (S') do garáže vjíždí (A) záď (C) auta
K	= [4/5; 4/3]	= [0; 16/15]'	podle garáže (S) do garáže vjíždí (A) záď (C) auta
M	= [3/2; 5/2]	= [0; 2]'	dostihne ho záblesk

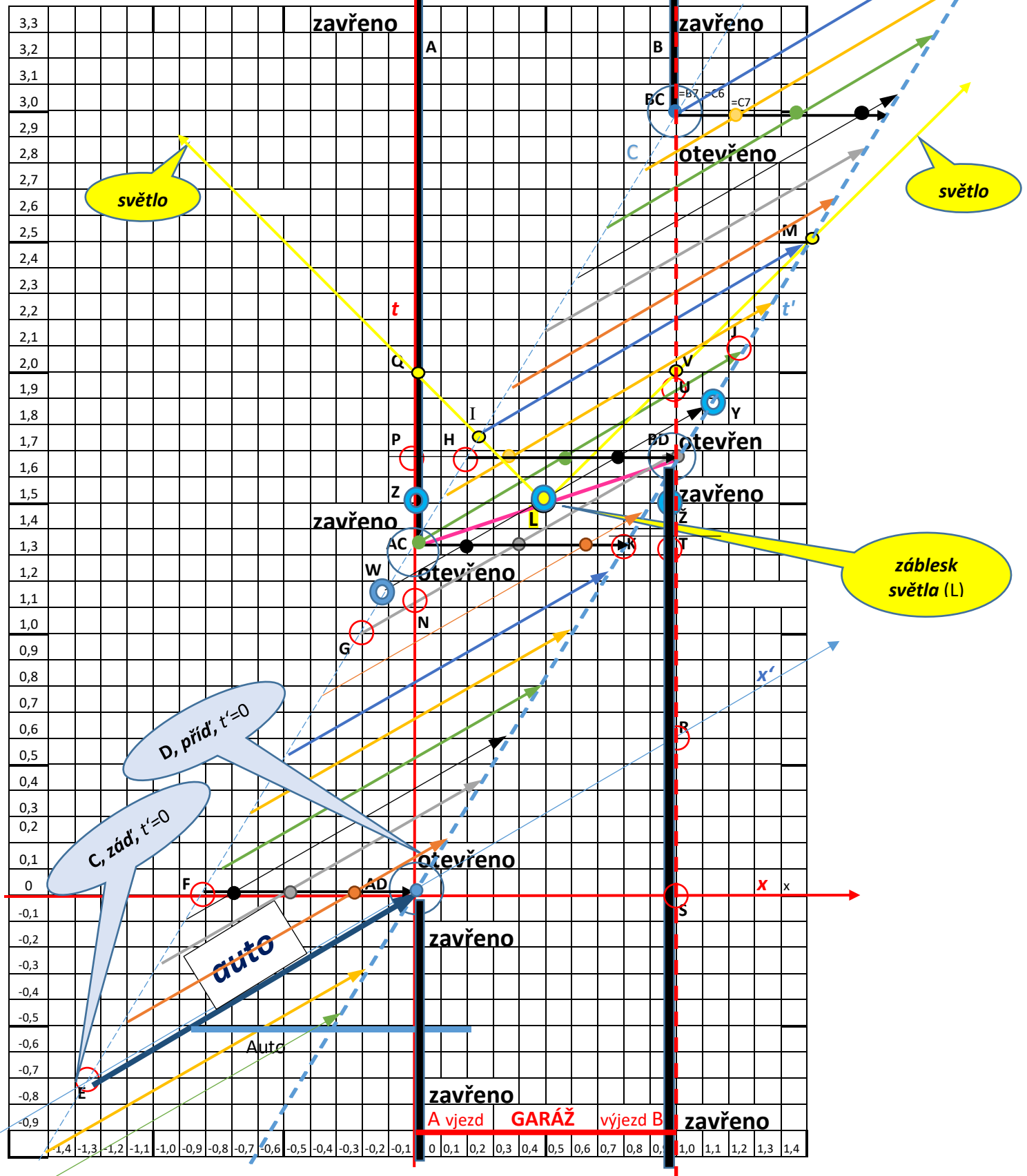
Vjezd (A) do garáže, když

N	= [0; 16/15]	= [-4/5; 4/3]'	podle auta (S') z garáže vyjíždí (B) příď (D) auta
P	= [0; 5/3]	= [-5/4; 25/12]'	podle garáže (S) z garáže vyjíždí (B) příď (D) auta
Q	= [0; 2;]	= [-3/2; 5/2]'	dostihne ho záblesk

Výjezd (B) z garáže, když

R	= [1; 3/5]	= [-4/5; 0]'	podle auta (S') do garáže vjíždí (A) příď (D) auta
S	= [1; 0]	= [5/4; -3/4]'	podle garáže (S) do garáže vjíždí (B) příď (D) auta
T	= [1; 4/3]	= [1/4; 11/12]'	podle garáže (S) do garáže vjíždí (B) záď (C) auta
U	= [1; 29/15]	= [-1/5; 5/3]'	podle auta (S') do garáže vjíždí (B) záď (C) auta
V	= [1; 2;]	= [-1/4; 7/4]'	dostihne ho záblesk

Auto s rychlostí $3/5 c$ jede podél stejně dlouhé garáže, počátek při setkání předě D auta s vjezdem A



Graf není rýsovaný počítačem, ale rukou ve Wordu. Je proto jen informativní.

Vysvětlivky ke grafu:

Soustava **S** (garáž) má jako osy vodorovnou červenou plnou šipku x (pro $t = 0$) a svislou červenou plnou čáru t (pro $x = 0$, vjezd do garáže, A). Výjezd B z garáže je svislá tlustá červená čárkovaná čára se souřadnicí $x = 1$. Zavřená vrata vjezdni i výjezdni jsou vyznačena tlustou svislou černou čarou. Vnitřek garáže je znázorněn dole tučnou vodorovnou čarou s označením **A vjezd GARÁŽ výjezd B**. V časovém úseku $t = (4/3 ; 5/3)$ jsou obojí vrata zavřena a auto je mezi nimi. Auto je z pohledu **S** znázorněno vodorovnou černou šipkou (vždy má délku 0,8 a barevné puntíky na ní vyznačují barvu příslušného místa).

Světelný signál vyslaný při setkání středu auta se středem garáže (událost L, $t = t' = 1,5$) je vyznačen a popsán jasně žlutě. V příslušných soustavách dojde signál současně k oběma koncům garáže ($t = 2$) či auta ($t' = 2$). Může být využit pro synchronizaci hodin v autě i v garáži.

Auto je v klidu v soustavě **S'**. Ta má osy x' (tenká bleděmodrá mírně šikmá šipka) a t' (strmá bleděmodrá tučná čárkovaná šipka); ta je současně světočarou přidě **D** (mající $x' = 0$). Světočára zádě **C** (mající $x' = -1$) je s ní rovnoběžná, bleděmodrá dlouhá tenká čárkovaná přímka. Auto v různých okamžicích v **S'** znázorňují kratší šikmé barevné šipky. **Auto mění barvu** (zelená, žlutá, **modrá**, oranžová, šedá, černá) každou $\Delta t' = 1/6$, jak je zde vyznačeno. To nám umožňuje odečítat čárkované hodnoty t' v soustavě **S'**; silnější modré šipky odpovídají celistvým hodnotám času t' (0; 1; 2; 3). Auto má samo vůči sobě v každém svém okamžiku všude stejnou barvu, jak udávají skloněné barevné šipky. Ovšem z garáže, v **S**, ho vidí v každém (svém) okamžiku duhově (černé vodorovné šipky s barevnými puntíky podle příslušné barvy).

Významné intervaly:

Čtverec intervalu je roven $I^2 = x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2$. Je tedy invariantem při Lorentzově transformaci.

Intervaly časové povahy, $I^2 < 0$

$(AC-AD)^2 = -(4/3)^2 = -16/9 = -(\text{doba } t)^2$ průjezdu auta bodem na zemi (v **S**)

$(BD-AD)^2 = -(5/3)^2 + 1^2 = -16/9 = -(\text{doba } t)^2$ průjezdu bodu na autě garáží (v **S'**)

Platí $(AD - AC)^2 = (R - U)^2 = (AD - BD)^2 (= -16/9)$.

Růžový interval AC – BD je prostorové povahy, $I^2 > 0$:

$(AC - BD)^2 = 1^2 - (1/3)^2 = 8/9$, = max. (vzdálenost)² setkání AC a BD.

Proto události AC (zád' auta A mívá vstup do garáže C) a BD (příd' auta B mívá výstup garáže D) – krajní body „růžového intervalu“ – mohou být vůči sobě v různém časovém vztahu:

- v soustavě **S** nastane napřed AC a pak BD, tedy celé krátké auto je jistou dobu ($\Delta t = 1/3$) uvnitř garáže,
- v soustavě **S'** nastane naopak napřed BD a pak AC, tedy krátká garáž je jistou dobu ($\Delta t' = 1/3$) navlečena kolem dlouhého auta.
- v jisté vztažné soustavě **S''** jsou krajní události současné. Auto má v této vztažné soustavě rychlost $1/3$, garáž – $1/3$ a auto je v ní stejně dlouhé jako garáž, totiž $\sqrt{8/9}$.